

三维伊辛(Ising)模型精确解的猜想

张志东

中国科学院金属研究所
中国科学院国际材料物理中心





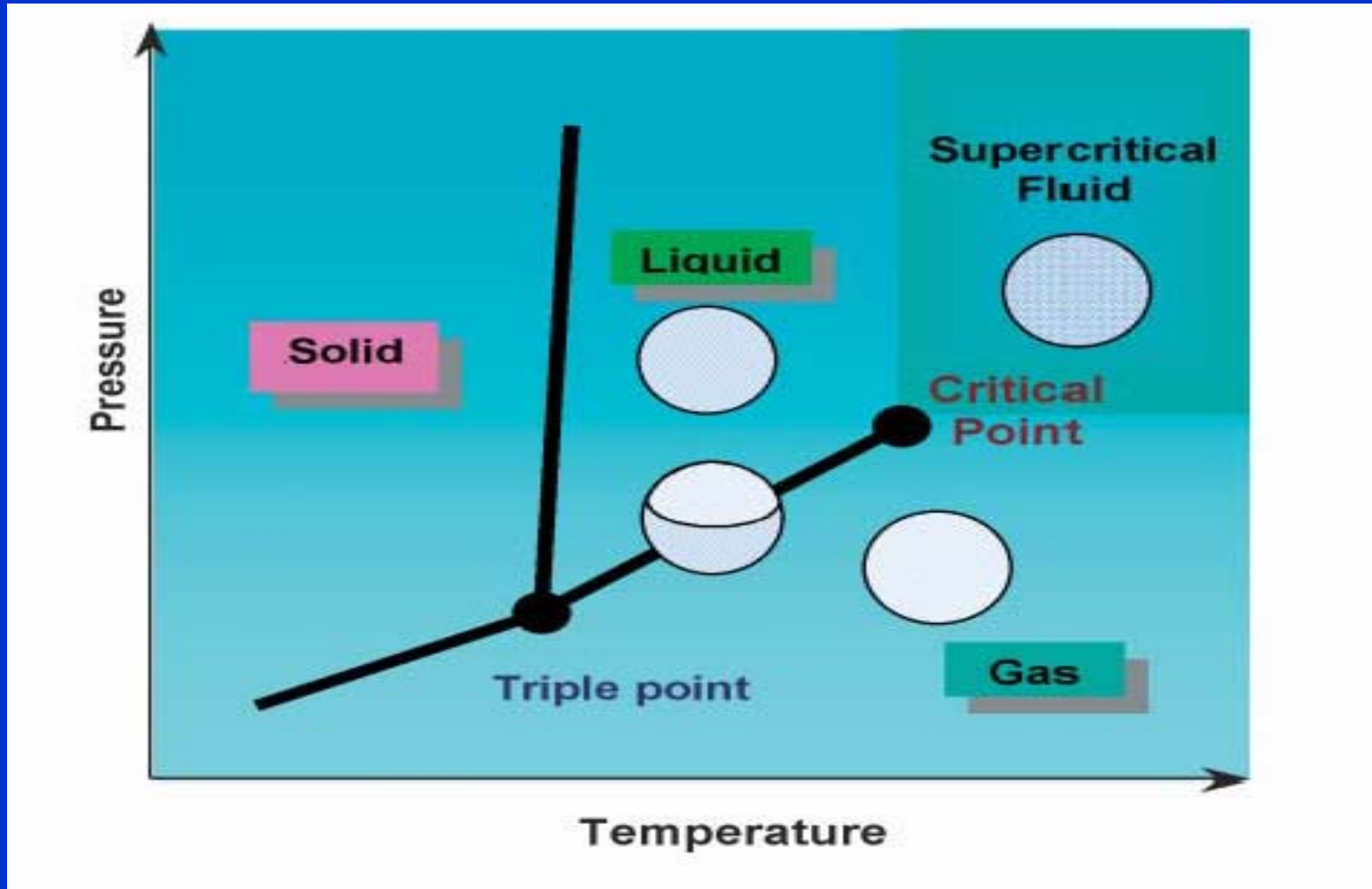
有序与无序

临界现象

- 有序：有秩序、有规则、低对称、低混乱.....
- 无序：无秩序、无规则、高对称、高混乱.....

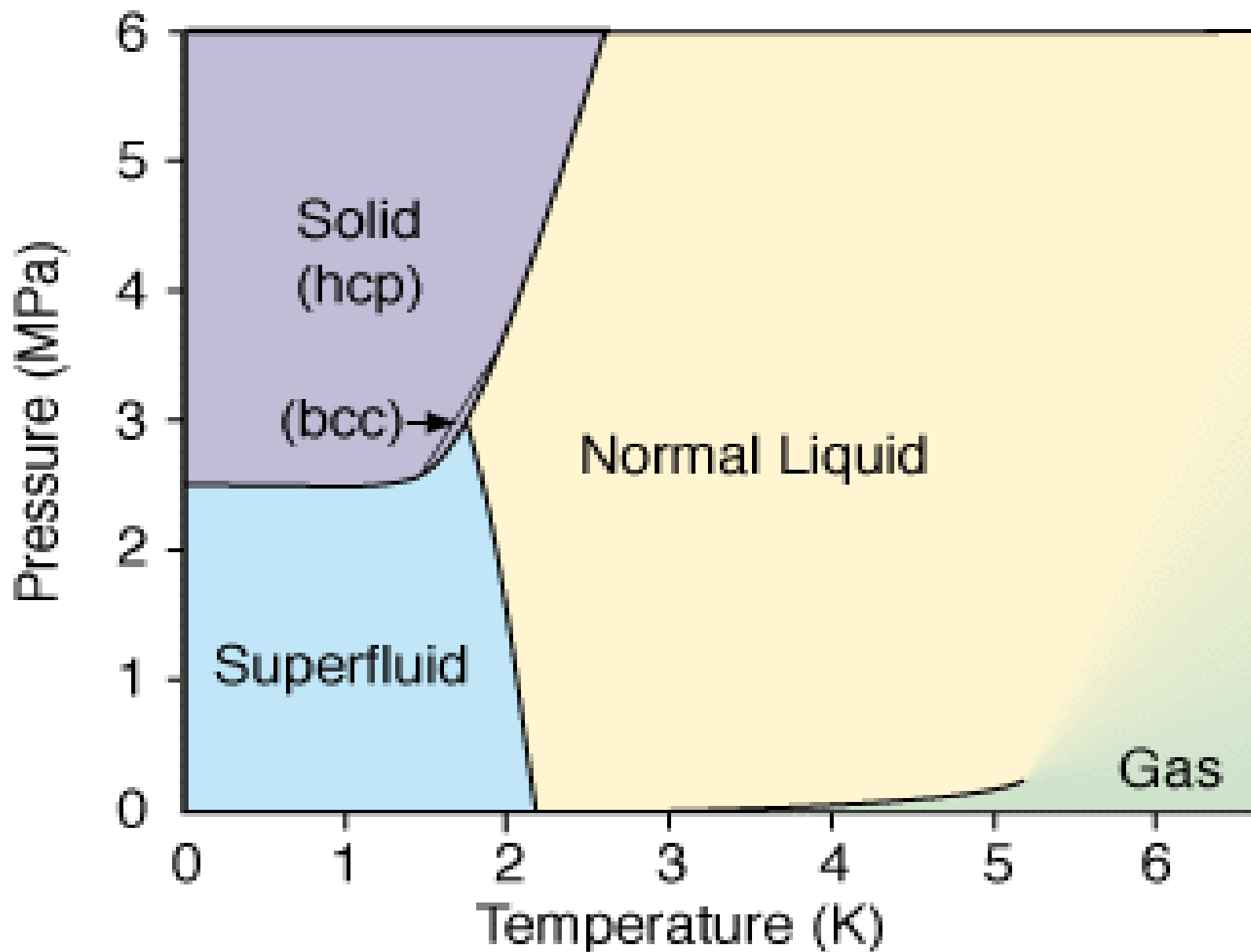


固、液、气相图



- Water: $T_c = 374.15\text{ }^{\circ}\text{C}$, $P_c = 221.2\text{ bar}$
- carbon dioxide: $T_c = 31.04\text{ }^{\circ}\text{C}$, $P_c = 73\text{ bar}$

^4He 的临界现象



^4He 的临界现象

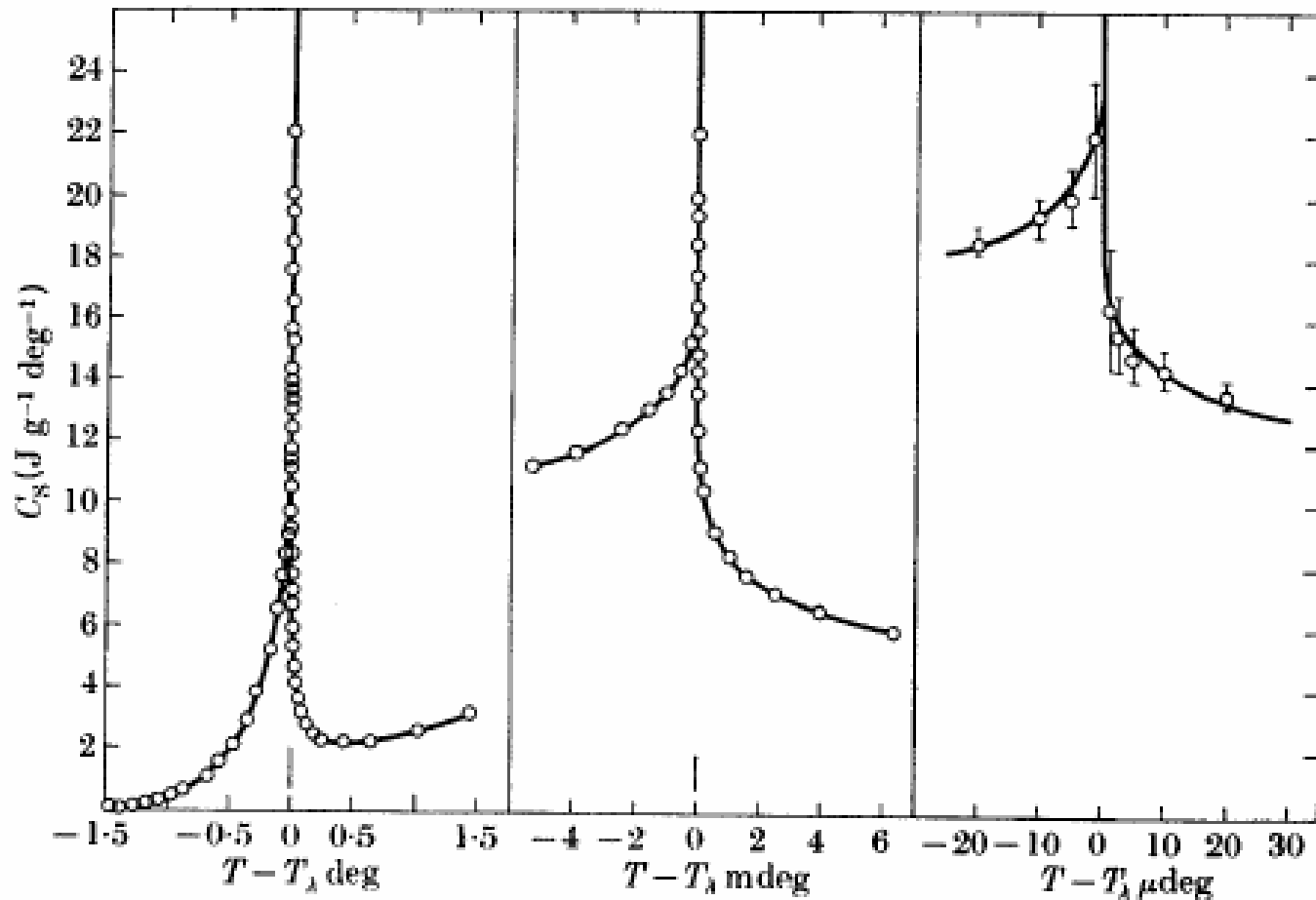
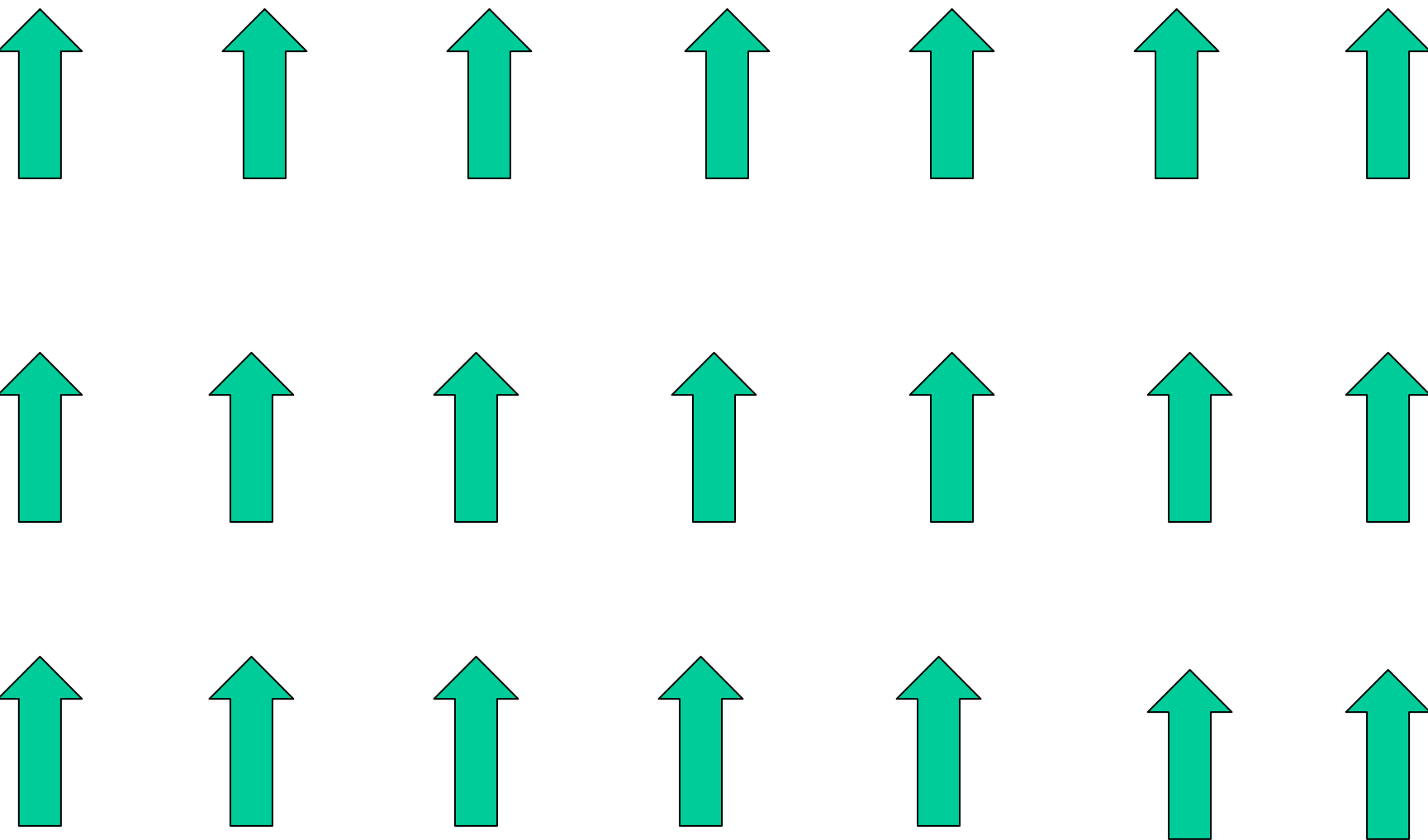


Figure 1 The famous "lambda-point" in the specific heat of ^4He at the superfluid phase transition. (Stanley)

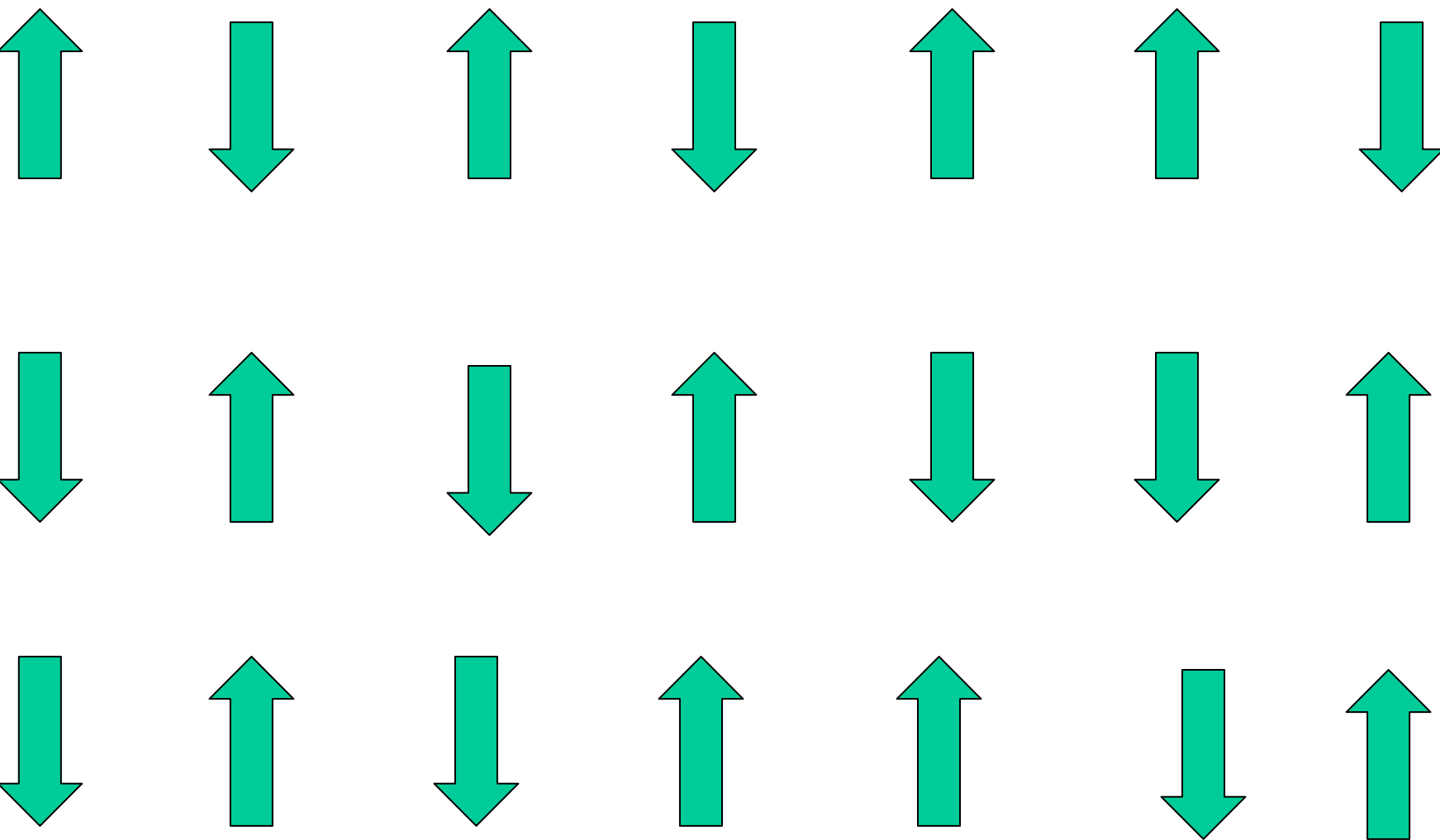
铁磁性

局域交换作用导致有序

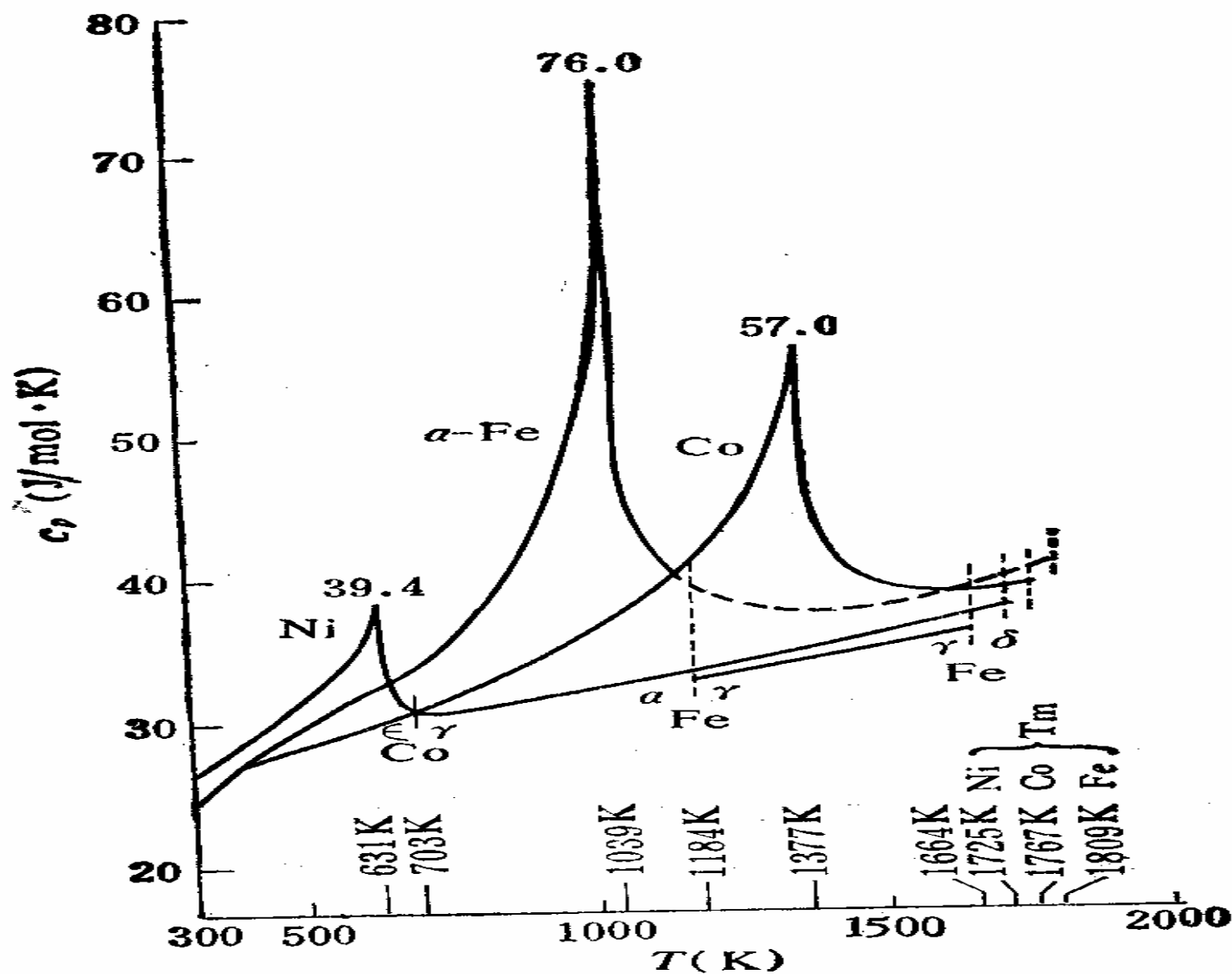


顺磁性

温度导致无序



比热反常



Fe, Co, Ni 的 c_p - T 关系曲线.

伊辛模型

1925年伊辛 (Ising) 描写铁磁体的简化模型:

设有 N 个自旋组成的 d 维晶格 ($d = 1, 2, 3$),

第 i 格点自旋为 $S_i = \pm 1$

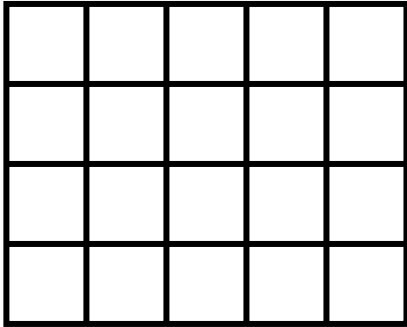
($i = 1, 2, \dots, N$; $+$ $-$ 分别代表上下)

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - g\mu_B H \sum_i S_i$$

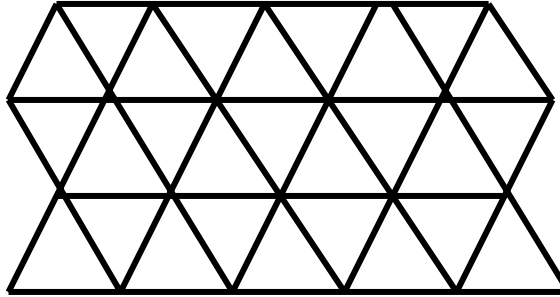
只考虑最近邻作用, 相互作用能为 J

$J > 0$ 为铁磁性, $J < 0$ 为反铁磁性

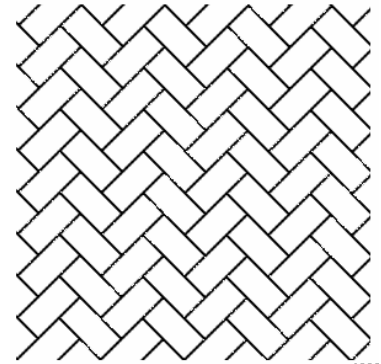
Two-Dimensional (2D) Systems



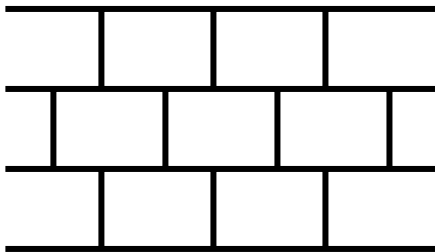
square



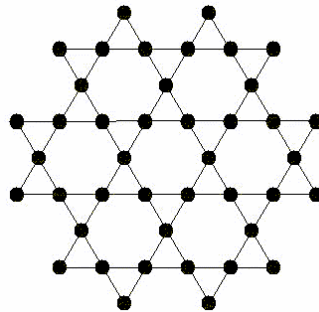
triangle



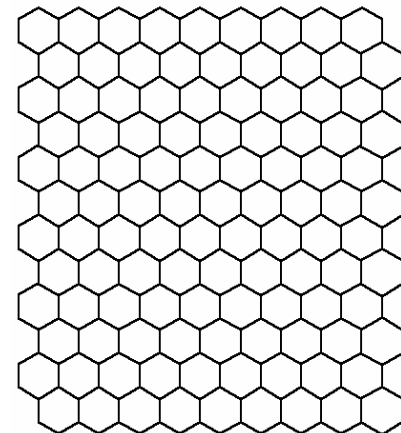
herringbone



brick-wall

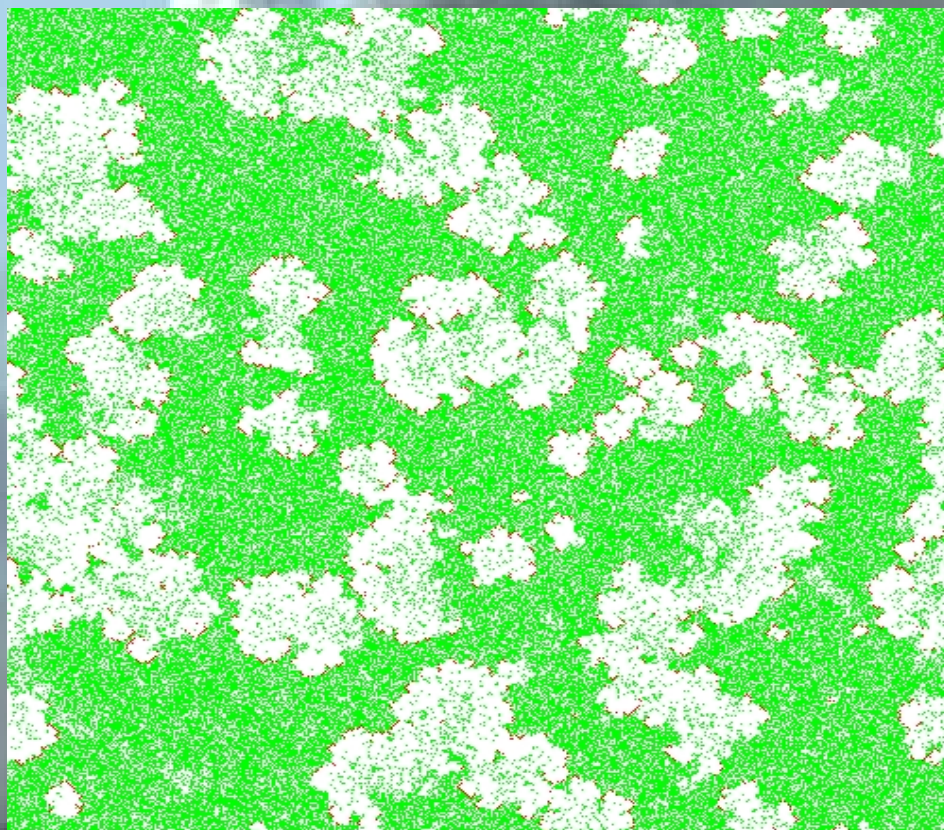


Kagome



honeycomb

森林大火



伊辛模型

1D exact solution (Ising 1925):

Magnetization
(磁化强度):

$$\frac{M}{g\mu_B N} = \frac{\sinh(g\mu_B H/k_B T)}{\sqrt{[\sinh(g\mu_B H/k_B T)]^2 + e^{-4J/k_B T}}}$$

当 $H \rightarrow 0$, $M \rightarrow 0$. $T > 0$. 在一维伊辛模型无自发磁化强度, 无磁有序和磁性相变。

Specific heat
(比热):

$$C_{H=0}(T, 0) = Nk_B \left(\frac{J}{k_B T}\right)^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{J}{k_B T}\right)$$

Susceptibility
(磁化率):

$$\chi_{H \rightarrow 0} = \frac{N(g\mu_B)^2}{k_B T} e^{4J/k_B T}$$

从三十年代开始，相变和临界现象的研究就是统计物理的一个重要的传统课题。由于相变理论必须考虑粒子之间的相互作用（理想Bose气体的BEC除外），使理论处理相当困难。

提出了一些模型和最简单的理论——平均场理论，以及在平均场理论基础上的改进，以及发展各种级数展开方法（如低温展开、高温展开等。原则上要找小参量）。

1944年Onsager给出两维Ising模型的严格解。

Bruria Kaufman给出了一个简便优雅的求解方案。求解伊辛模型时仅能引入一次周期性边界条件。这是由于伊辛模型是许多自旋之间的相互作用问题，是一个多体问题。

求解二维伊辛模型比一维复杂多了。一维将问题简化为对 2×2 矩阵求能量本征值。二维就要面对两个 $2^N \times 2^N$ 矩阵相乘后求能量本征值问题。首先将两个 $2^N \times 2^N$ 矩阵用泡利自旋矩阵表示，写成泡利自旋矩阵直乘及其乘积的线性组合，构成这两个矩阵的自旋表象；通过两个引理证明自旋表象矩阵的本征值对应于相应的 $2N \times 2N$ 转动矩阵的本征值；从转动矩阵具有特殊的形式，可以列出容易求解的本征值方程，求出本征值；返回去求出系统的能量本征值。

五十年代由于实验的改进，积累了许多有关临界现象的实验数据。严格解、级数展开和实验三方面，使研究人员认识到幂律能正确地描写临界点邻域的行为。

六十年代建立起临界现象的标度理论。经过Kadanoff，Fisher等人的努力，最后，1971年K.Wilson 发展了完整的重整化群理论。重整化群理论与传统的相变理论不同，在概念和方法上另辟蹊径，具有强大的威力，已成为研究临界现象的有力理论方法，Wilson 也因此而获得1981年的Nobel物理学奖。重整化群理论还得到广泛的应用（凝聚态物理、宇宙学，……）。

块体中的实验数据

Specific heat: $C = A^{\pm} |T - T_{\lambda}|^{-\alpha}$

Space experiment:

$$\alpha = -0.0106 \pm 0.0004$$

(Lipa et al.) $A^{+}/A^{-} = 1.044 \pm 0.001$

theory: $\alpha = -0.011 \pm 0.004$

$$A^{+}/A^{-} = 1.046 \pm 0.002$$

临界指数理论和实验值

指数	平均场	2D伊辛	3D伊辛	重正化	实验	汽—液
α	0	0	0.125	0.110	≤ 0.16	~ 0.125
β	1/2	1/8	0.312	0.340	0.34	0.345
γ	1	7/4	1.25	1.241	1.33	1.20
δ	3	15	5.150	4.46		4.2
ν	1/2	1	0.642	0.63		
η	0	1/4	0.055	0.037	0.07	

莫比乌斯带



三维伊辛(Ising)模型精确解的猜想

- **猜想一：** 三维伊辛模型的拓扑学问题可以被在四维空间引入的一个附加的旋转解决，因为在三维空间的扭曲和纽结可以被在四维空间的旋转打开。我们可以在 $2^{N \cdot L \cdot O}$ 空间(其中 $O=(N \cdot L)1/2$)进行这个旋转，它对应在 $2^{N \cdot L \cdot O}$ 空间的自旋表象。同时，自旋表象矩阵及其对应的旋转矩阵将在这种高维的空间被重新安排和表示。
- **猜想二：** 用在 $[-1, 1]$ 范围内变化的权重因子 w_x , w_y 和 w_z 作用在本征矢量来表达 $\exp(i t_x \pi / N)$, $\exp(i t_y \pi / L)$ 和 $\exp(i t_z \pi / O)$ 在四维空间对系统的能谱的贡献。

三维伊辛(Ising)模型精确解的猜想

- 三维伊辛模型对应于自旋表象中三个 $2^{N \cdot L} \times 2^{N \cdot L}$ 矩阵相乘，相应地对应于三个 $2NL \times 2NL$ 转动矩阵。我们实际上要在 $2^{N \cdot L \cdot O}$ 自旋表象空间，以及相应的 $2N \times L \times O$ 旋转空间来处理问题。分别多加了一个 $2^{N \cdot L \cdot O}$ 自旋表象矩阵相乘，对应地多加了一个 $2N \times L \times O$ 旋转矩阵相乘，同时将原来的三个 $2^{N \cdot L} \times 2^{N \cdot L}$ 自旋表象矩阵、三个 $2NL \times 2NL$ 转动矩阵分别在 $2^{N \cdot L \cdot O}$ 和 $2N \times L \times O$ 空间重新安排和表示。

三维伊辛(Ising)模型精确解的猜想

- 三维伊辛模型三个转动矩阵中矩阵元的旋转角分别为 K^* , K' , K'' ，分别对应于沿三个坐标轴方向自旋间的交换作用常数与温度的比例。考虑到存在的拓扑扭曲和纽结的特点，我们将增加的转动矩阵中矩阵元的旋转角设为 $K''' = K'K''/K$ 。这代表了三维伊辛模型的拓扑问题：沿三个坐标轴方向自旋间的交换作用常数完全纠缠在一起，需要用这样的具有不同常数纠缠在一起的旋转打开。

三维伊辛(Ising)模型精确解的猜想

简单正交晶格的配分函数:

$$N^{-1} \ln Z = \ln 2 + \frac{1}{2(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left[\cosh 2K \cosh 2(K' + K'' + K''') - \sinh 2K \cos \omega' \right. \\ \left. - \sinh 2(K' + K'' + K''') (w_x \cos \omega_x + w_y \cos \omega_y + w_z \cos \omega_z) \right] d\omega' d\omega_x d\omega_y d\omega_z$$

居里温度的条件:

$$\cosh \gamma_0 = \cosh 2(K^* - K' - K'' - K''')$$

三维伊辛(Ising)模型精确解的猜想

简单正交晶格居里温度的条件:

$$K^* = K' + K'' + K'''$$

$$KK^* = KK' + KK'' + K'K''$$

$$\sinh 2K \cdot \sinh 2(K' + K'' + K''') = 1.$$

$$\tanh^{-1} e^{-2K} = K' + K'' + K'''$$

三维伊辛(Ising)模型精确解的猜想

简单立方晶格居里温度的条件:

$$K^* = 3K_c$$

$$x_c = e^{-2K_c} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803398874989484820458683436563811.....$$

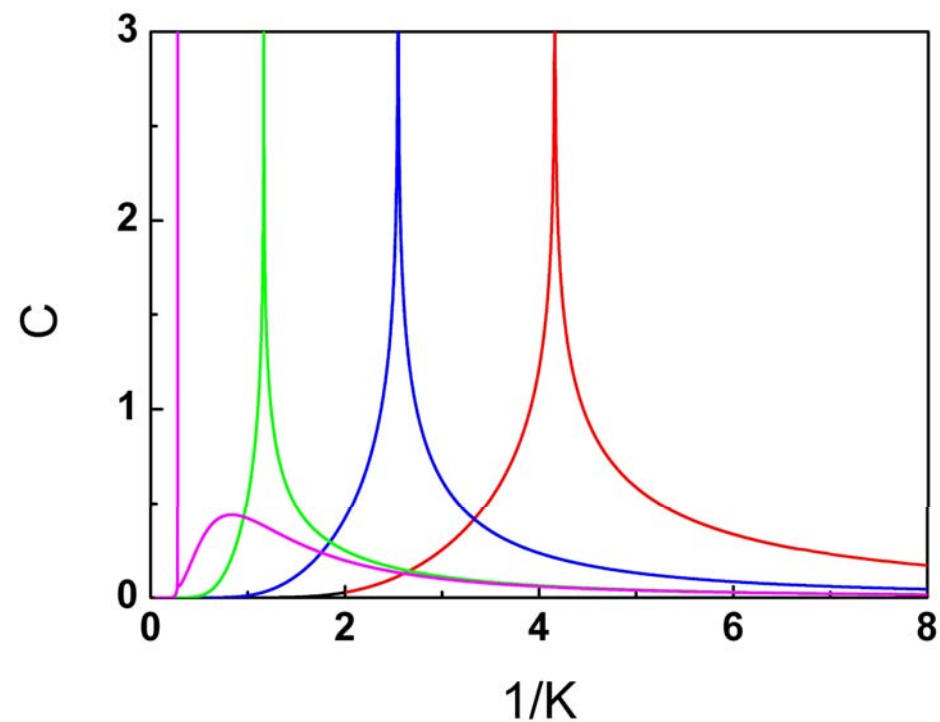
$$\sinh 2K_c = \frac{1}{2},$$

$$\cosh 2K_c = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

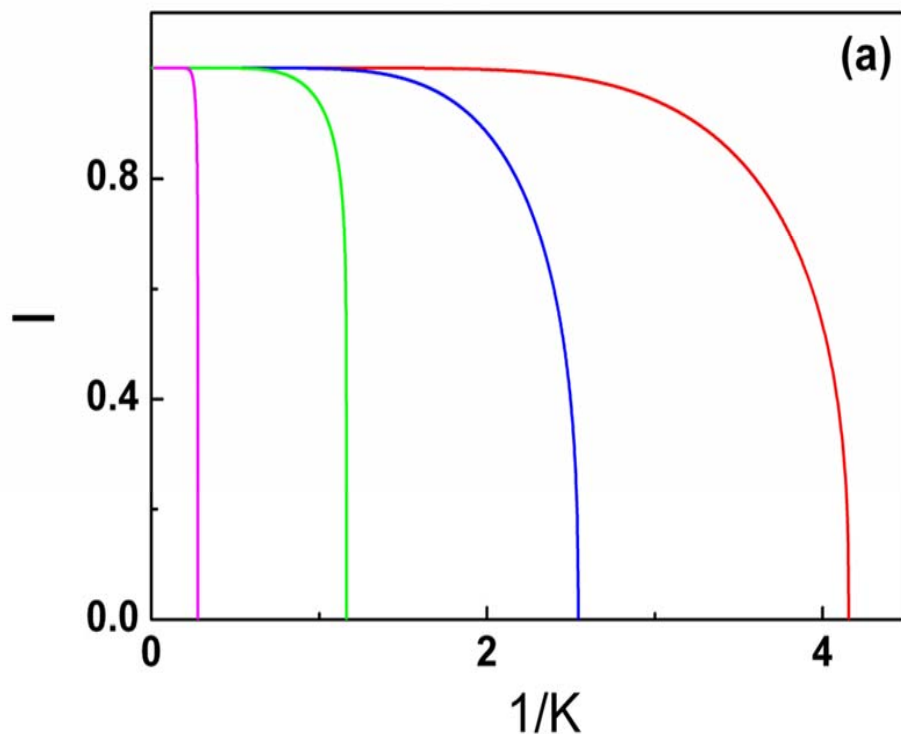
$$K_c = 0.24060591.....$$

$$1/K_c = 4.15617384.....$$

三维伊辛(Ising)模型精确解的猜想

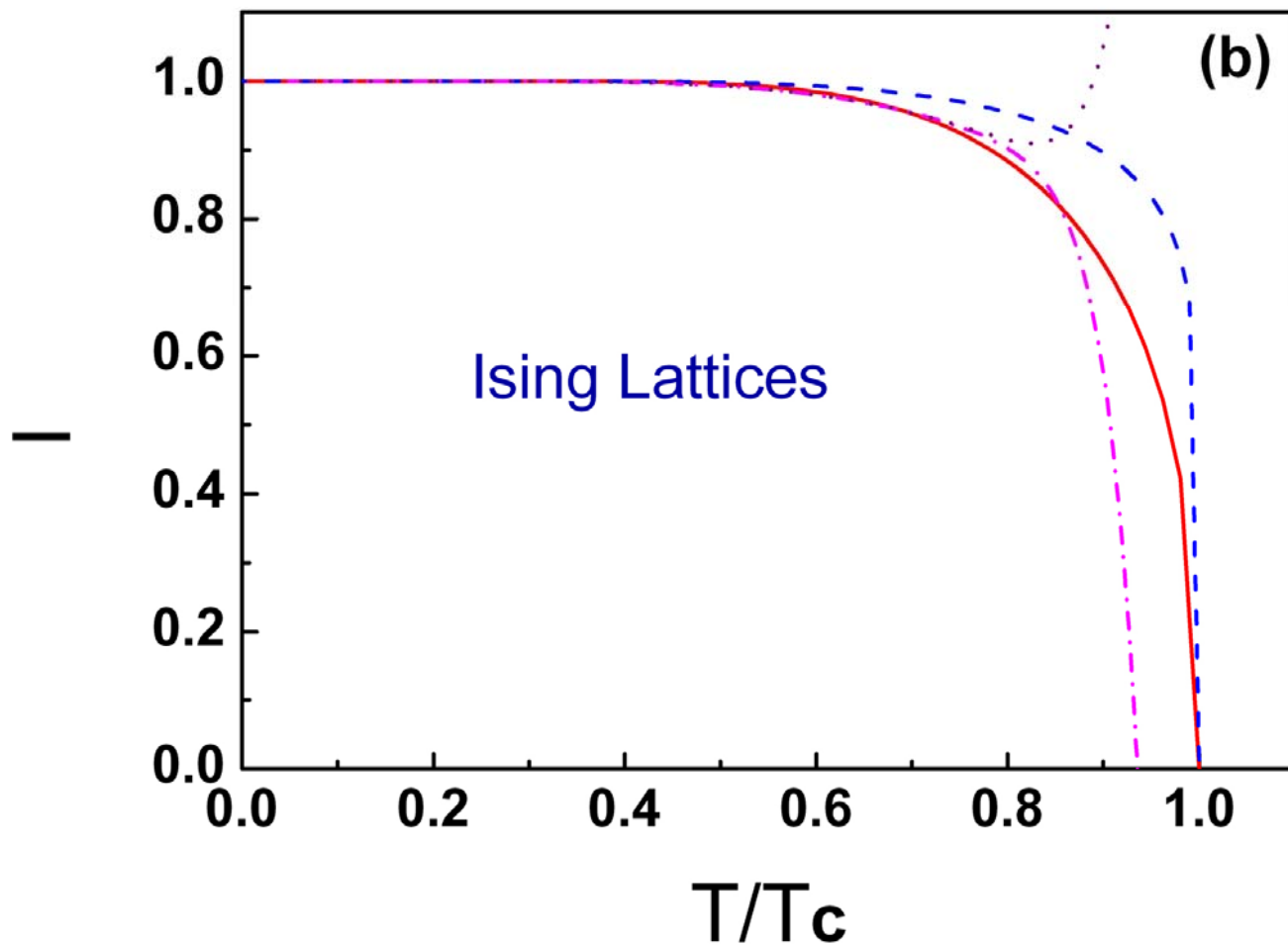


比热



自发磁化强度

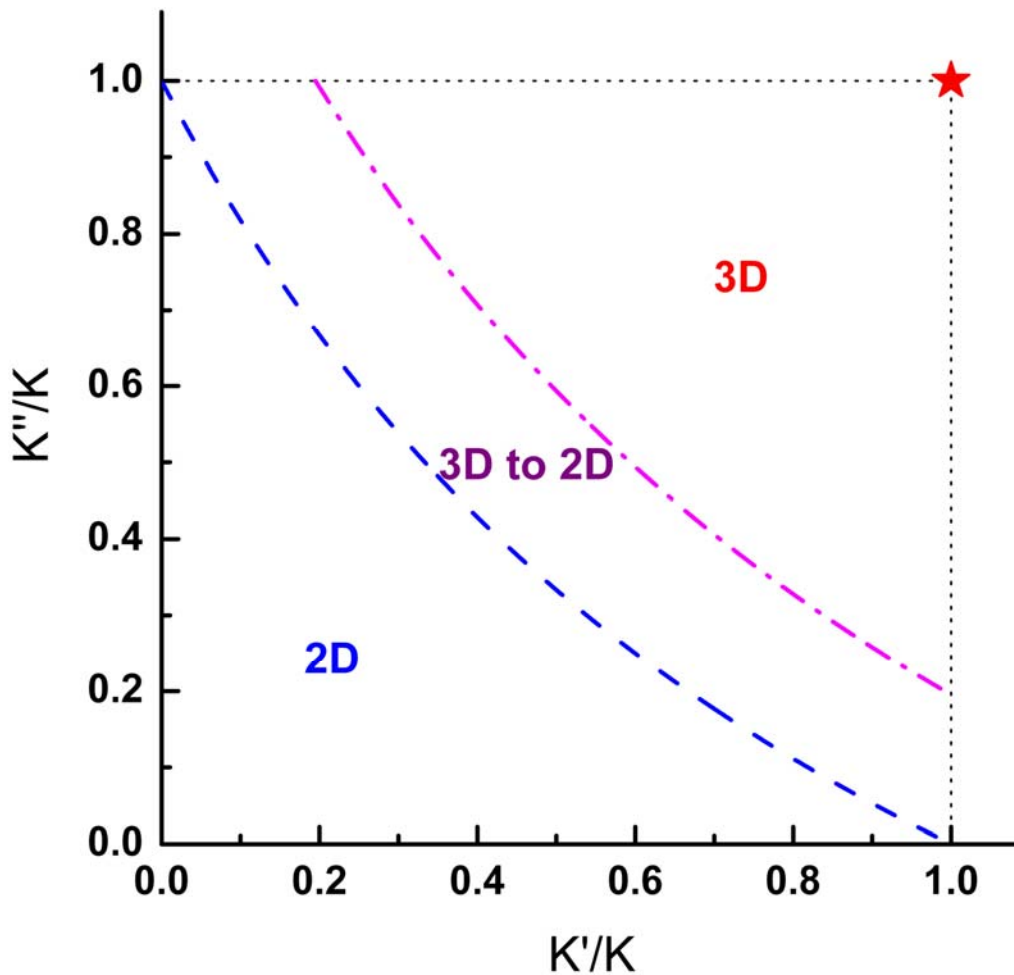
2D和3D自发磁化强度



临界指数

Ising	α	β	γ	δ	η	ν
1D Exact	—	—	2	∞	1	2
2D Exact	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{4}$	15	$\frac{1}{4}$	1
3D Exact	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$
4D MF	0	$\frac{1}{2}$	1	3	0	$\frac{1}{2}$
3D WK-RG	0.077	0.340	1.244	4.46	0.037	0.626
3D PV-MC	0.110	0.3265	1.2372	4.789	0.0364	0.6301
3D WK-SE	0.125 ± 0.015	0.312 ± 0.003	1.250 ± 0.003	5.150 ± 0.02	0.055 ± 0.010	0.642 ± 0.003
3D F($T < T_c$)	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{26}{5}$	$-\frac{1}{31}$	$\frac{31}{48}$
3D F($T > T_c$)	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{4}$	5	0	$\frac{5}{8}$

三维伊辛(Ising)模型精确解的猜想



从三维到二维临界指数的过渡

巧合

- 1) 推定的本征值、本征矢量、配分函数、居里温度以及其它物理性能，结果可以自动返回一、二维伊辛模型。
- 2) 推定的简单立方伊辛模型的居里温度低于所有不同的近似方法（包括分子场理论及其改进理论、**Wakefield**方法、**Bethe**近似、**Kirkwood**方法、低温级数展开、高温级数展开、重正化群理论、蒙特-卡罗模拟等）获得的结果。
- 3) 结果与五十年代**Kikuchi**方法估计的居里温度范围的最低值极限非常接近，误差在**1.6%**的范围。与五十年代**Oguchi**估计的居里温度范围 **$4.16667 < 1/Kc < 4.7619$** 的低值极限完全吻合，实际上正好落在**Oguchi**估计的最低可能值的边界上，误差在**~0.25 %**。
- 4) **Rosengren**猜想的第一个因子 **$\tanh Kc = (\sqrt{5} - 2)$** 与推定的三维简单立方伊辛模型的居里温度完全一致！

巧合

- 1) 推定的三维简单正交伊辛模型临界指数满足标度律，并对整个体系具有普适性。
- 2) 学术界公认级数展开、重正化群理论和蒙特-卡罗模拟等方法对临界指数 γ 的数值计算结果最精确。推定的临界指数 γ 与**C.Domb**和**M.E. Fisher**根据数值计算的结果提出的猜想 $\gamma = 5/4$ 完全一致。
- 3) 推定临界指数 β 和 δ 与**Vicentini-Missoni**的综述中收集的被认为是最可信的实验数据符合得很好。
- 4) 推定的临界指数几乎是与真实流体的临界指数 γ , δ , η 和 ν 完全相等。
- 5) 推定的临界指数 μ 和 ν 在实验误差范围内与两相流体的临界指数吻合。
- 6) 大家同意临界指数 α 等于零以及选择临界指数 γ 作为近似计算结果中最精确的一个临界指数，推定的临界指数与近似结果和实验数据非常接近。

三维伊辛(Ising)模型精确解的猜想

简单立方晶格居里温度的条件:

$$K^* = 3K_c$$

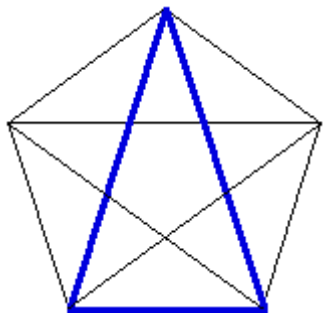
$$x_c = e^{-2K_c} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803398874989484820458683436563811.....$$

$$\sinh 2K_c = \frac{1}{2},$$

$$\cosh 2K_c = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$K_c = 0.24060591.....$$

$$1/K_c = 4.15617384.....$$



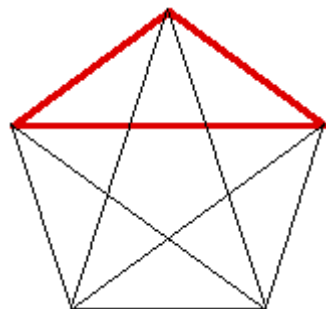
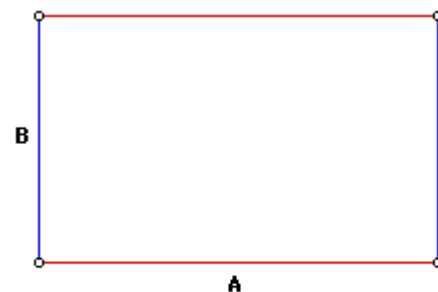
$$x^2 - x - 1 = 0$$



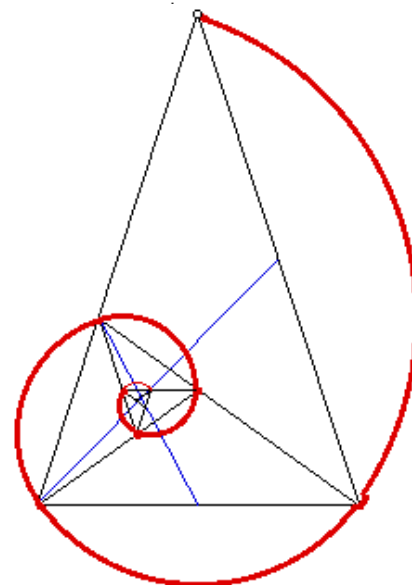
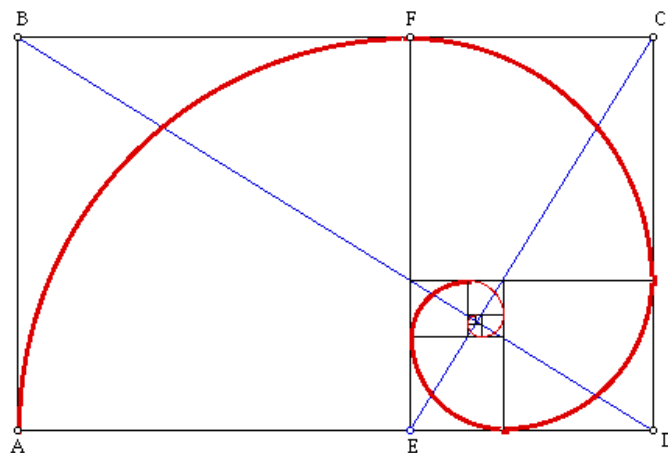
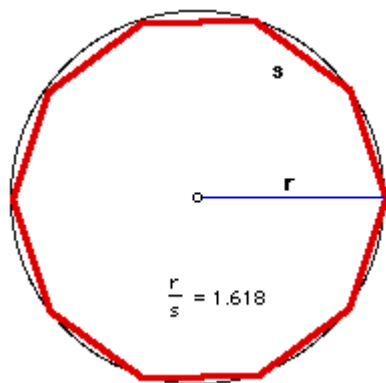
$$\frac{A+B}{A} = 1.618$$

$$\frac{A}{B} = 1.618$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$



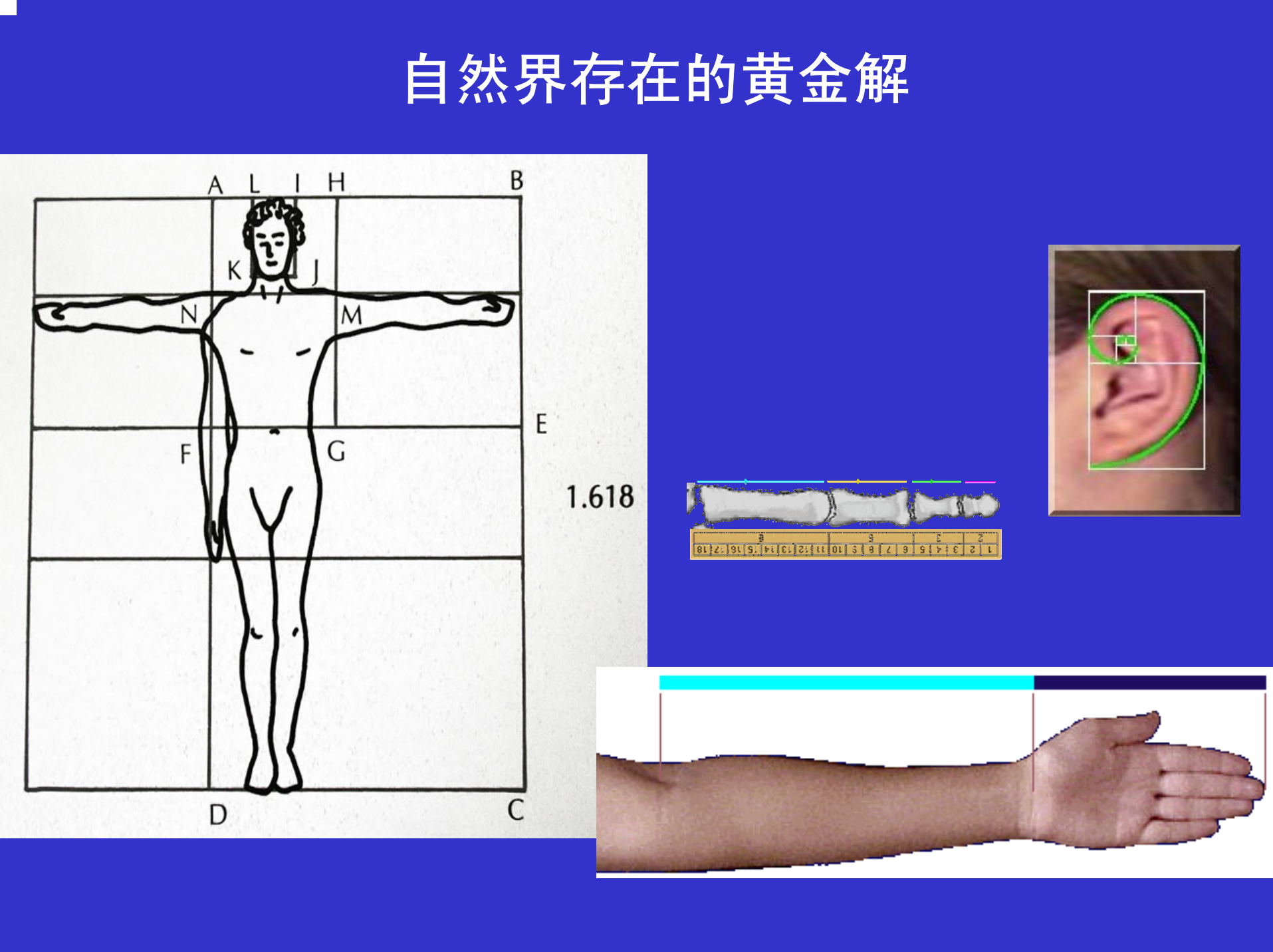
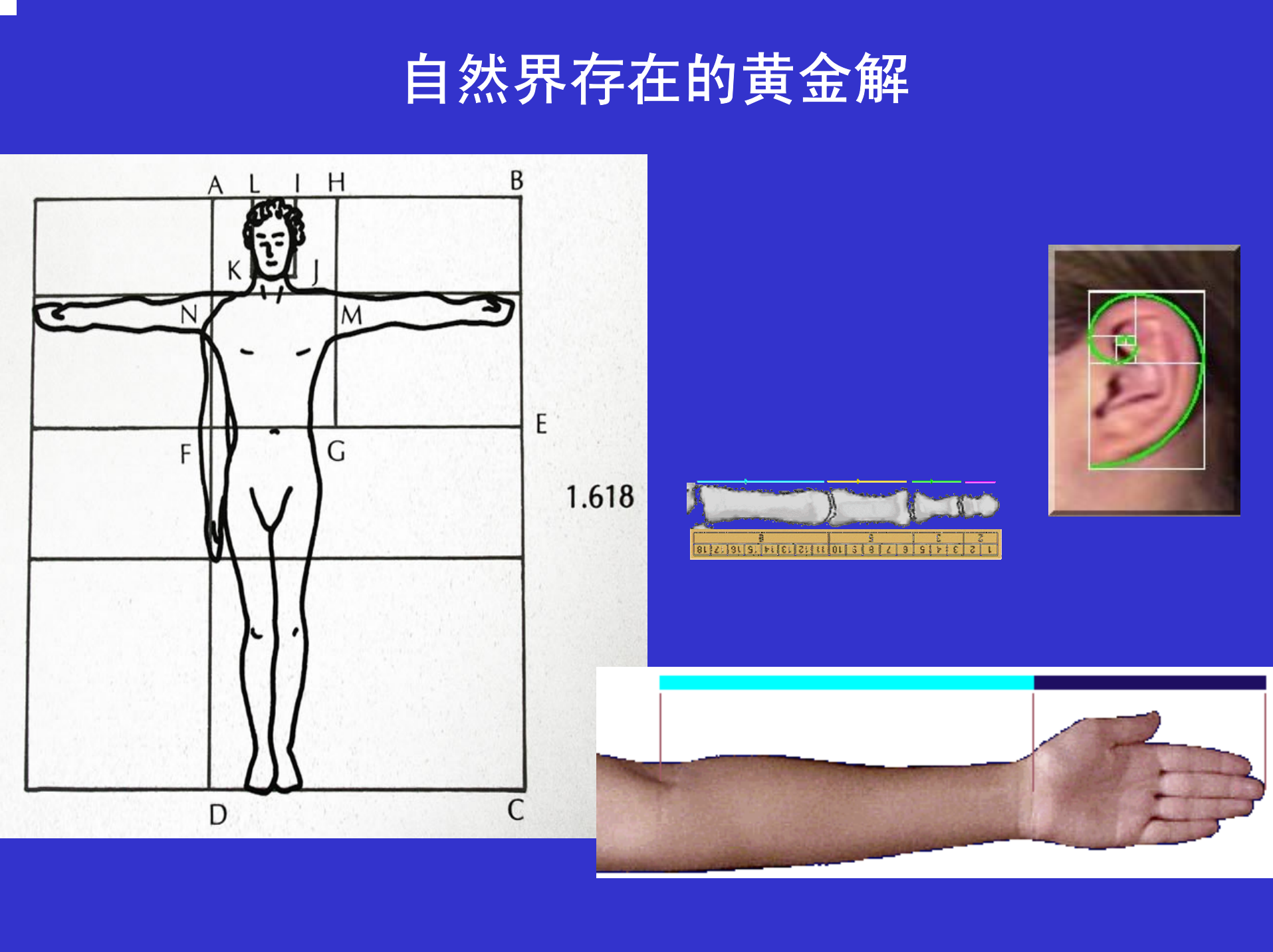
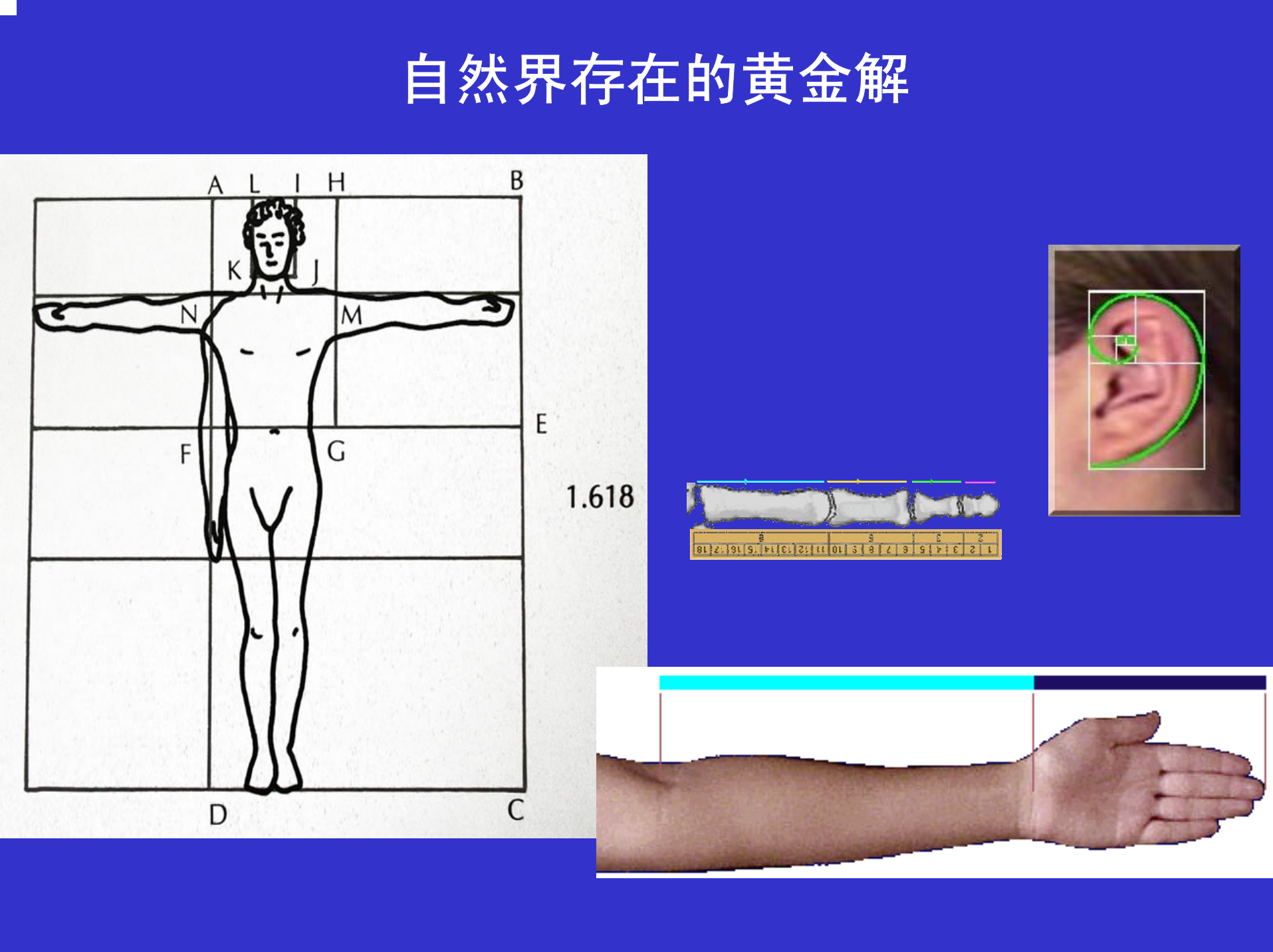
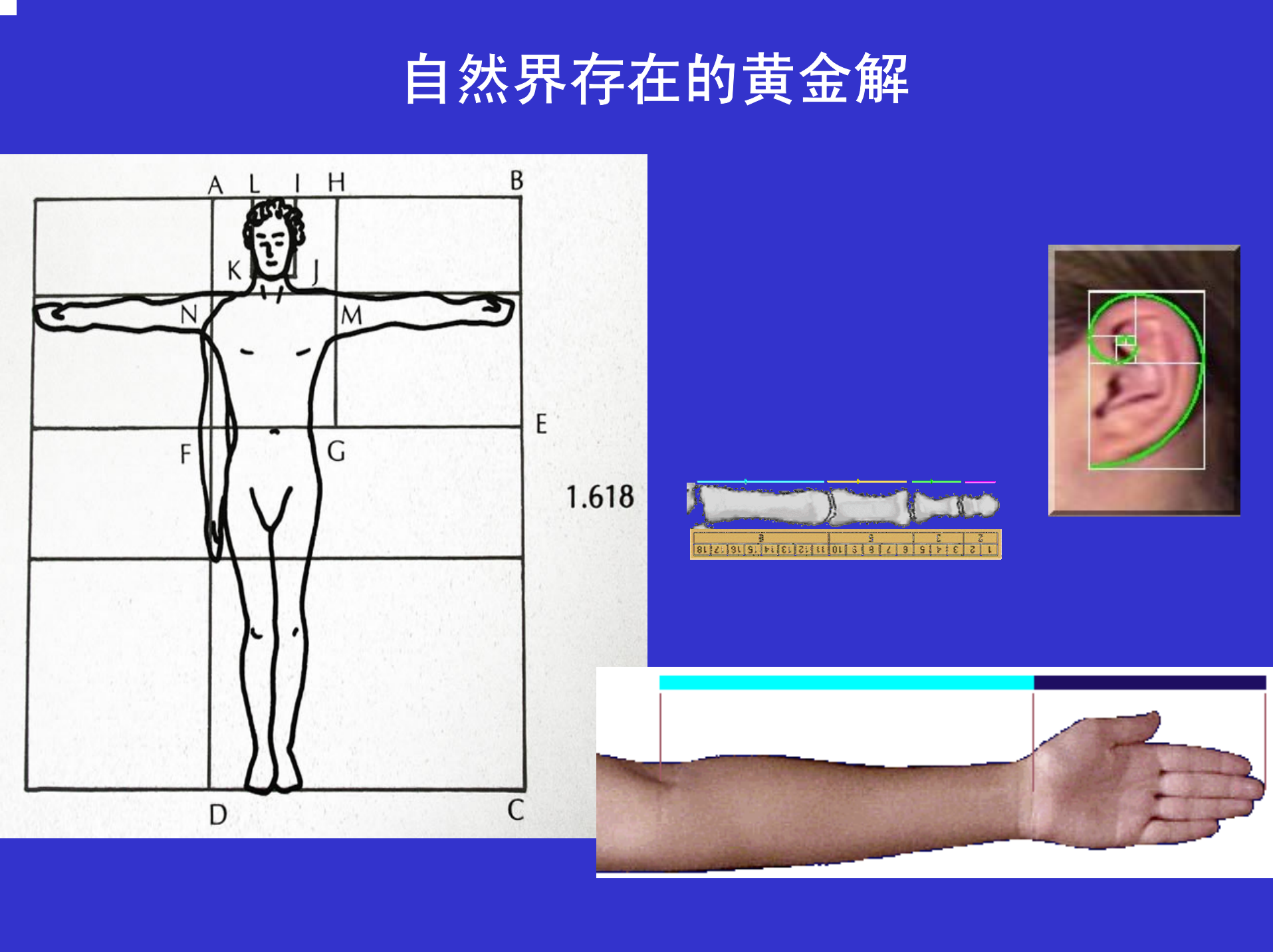
$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$



自然界存在的黄金解

The image is a composite illustrating the Golden Ratio (1.618) in nature. It features several elements:

- Leonardo da Vinci's Vitruvian Man:** A black and white line drawing of a man inscribed within a square and a circle. The drawing is annotated with letters (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N) and the number 1.618, demonstrating the ratio's application to human proportions.
- Human Ear:** A close-up photograph of a human ear with a green spiral overlay, illustrating the Golden Ratio's presence in biological structures.
- Human Arm:** A photograph of a human arm with a red spiral overlay, illustrating the Golden Ratio's presence in biological structures.
- Human Hand:** A photograph of a human hand with a red spiral overlay, illustrating the Golden Ratio's presence in biological structures.







Spiral Galaxy M81

Spitzer Space Telescope • IRAC

NASA / JPL-Caltech / S. Willner (Harvard-Smithsonian CfA)

ssc2003-06

详细内容

- Zhi-dong Zhang, Conjectures on exact solution of three - dimensional (3D) simple orthorhombic Ising lattices, Philosophical Magazine 87 (2007) 5309.
- <http://www.sciencenet.cn/blog/张志东.htm>
-

今后的工作重心

- 1) 三维伊辛模型存在其它解的可能性;
- 2) 从数学上证明猜想的严格性;
- 3) 严格证明三维伊辛模型的低温级数展开的收敛半径为零;
- 4) 猜想和推定的精确解的深层次物理内涵。

三维伊辛模型的精确解

Discoveries → ★

We are
here

谢谢!

